Contrôle Continu 2

Jeudi 30 novembre 2017

Exercice 1 : Voitures

Une entreprise produit des voitures en quantité q, vendues à un prix p et produite à partir de deux facteurs de production : des machines en quantité notée x_1 et du métal en quantité notée x_2. Elle achète ces facteurs à des prix notés w_1 et w_2. La fonction de production de l'entreprise est la suivante :

$$q = (x_1 x_2)^{\frac{2}{3}}$$

Partie 1 *(14 points)*

1. *(6 points)* Dans un premier temps, nous nous plaçons à court terme : les machines sont utilisées en quantité fixe $\bar{x}_1$. Définissez le coût irrécouvrable. Que vaut-il ici ? Quel sera le coût total à court terme ? Le coût marginal ? Le coût moyen ? Le coût variable moyen ? Représentez graphiquement le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen pour $w_1 = w_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = 1$. Définissez et donnez le seuil de rentabilité et le seuil de fermeture pour des valeurs quelconques de w_1, w_2 et $\bar{x}_1$. Commentez. Le coût irrécouvrable est le coût de l'investissement dans le facteur fixe à court terme. Il est dit irrécouvrable parce que l'entreprise l'a déjà payé et ne peut pas l'ajuster *a posteriori*. Il est ici de $w_1\bar{x}_1$. *(1 point)* À court terme, $x_1 = \bar{x}_1$, on a donc

$$x_2 = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{\bar{x}_1}$$

On en déduit le coût total :

$$CT(q) = w_1\bar{x}_1 + \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^{\frac{3}{2}} = CF + CV(q)$$

Le coût marginal :

$$Cm(q) = CT'(q) = \frac{3}{2}\frac{w_2}{\bar{x}_1} q^{\frac{1}{2}}$$

Le coût moyen :

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q} = w_1\bar{x}_1 \frac{1}{q} + \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^{\frac{1}{2}}$$

Le coût variable moyen :

$$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q} = \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^{\frac{1}{2}}$$

(2 points) Pour $w_1 = w_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = 1$, on a $Cm(q) = 3/2\sqrt{q}$, $CM(q) = 1/q + \sqrt{q}$ et $CVM(q) = \sqrt{q}$.

(1 point) Le seuil de rentabilité est le prix à partir duquel il est possible pour le producteur de produire en faisant des bénéfices. Il est atteint au minimum du coût moyen. On calcule donc la CPO :

$$CM'(q) = 0 \Leftrightarrow -w_1\bar{x}_1 \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2}\frac{w_2}{\bar{x}_1} q^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Soit $q = 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{x}_1^{\frac{4}{3}}$. On obtient alors un seuil de rentabilité de :

$$p = \left(\frac{w_1 w_2^2}{\bar{x}_1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

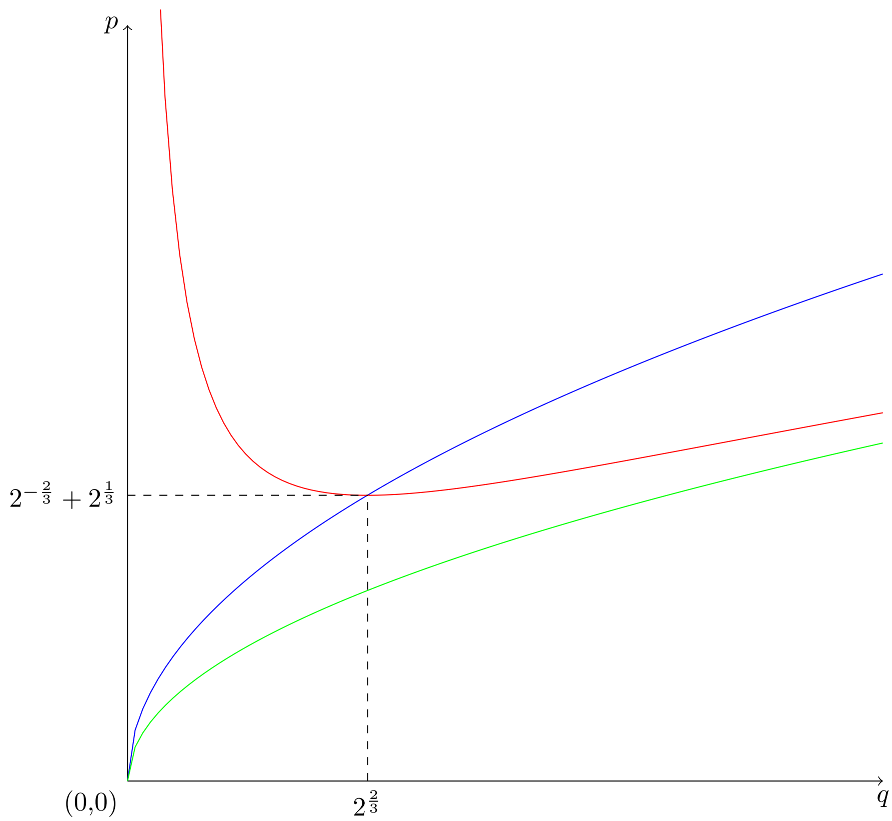

Figure 1: En bleu le coût marginal, en rouge le coût moyen et en vert le coût variable moyen. *1 point*

Ce seuil est croissant avec les prix des facteurs, et est plus sensible au prix du métal qu'au prix des machines. Il est au contraire décroissant avec la quantité de machines. *(2 points)* Le seuil de fermeture est le prix à partir duquel il est plus intéressant pour le producteur de produire, même à perte, plutôt que de ne pas produire. Il est atteint au minimum du coût variable moyen. Ce minimum est clairement atteint quand $q = 0$, soit à $p = 0$. *(1 point)*

2. *(3 points)* Toujours à court terme, mais de nouveau pour des valeurs générales de w_1, w_2 et $\bar{x}_1$, quel est le profit de l'entreprise ? Comment évolue-t-il en fonction de leur investissement fixe en machine ?
   La fonction d'offre de l'entreprise est donnée par $p = Cm(q)$, soit ici : *(1 point)*

$$p = \frac{3}{2}\frac{w_2}{\bar{x}_1}q^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow q = \frac{4}{9}\bar{x}_1^2\frac{p^2}{w_2^2}$$

   On obtient donc un profit de : *(1 point)*

$$\pi(q) = \frac{8}{27}\frac{p^3}{w_2^2}\bar{x}_1^2 - w_1\bar{x}_1$$

   Cette fonction est d'abord décroissante, puis croissante à partir d'un certain investissement $\bar{x}_1^\star = \frac{27}{16}\frac{w_1 w_2^2}{p^3}$ (polynôme du second degré). *(1 point)*

3. *(4 points)* Toujours dans le cas général, mais à long terme maintenant. Quel va être la fonction d'offre de l'entreprise ? Est-ce que cette fonction d'offre ressemble à une fonction d'offre classique ? On a ici

une fonction de production de Cobb-Douglas, les conditions d'optimalités sont

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$q = (x_1 x_2)^{\frac{2}{3}}$$

On obtient alors :

$$x_1^\star = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{4}}$$

$$x_2^\star = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{4}}$$

Soit un coût total de :

$$CT(q) = 2\sqrt{w_1 w_2} q^{\frac{3}{4}}$$

On obtient la fonction d'offre en égalisant coût marginal et prix :

$$O(p) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{w_1^2 w_2^2}{p^4}$$

Cette fonction d'offre n'est pas classique, elle est décroissante avec le prix (cela est du au rendement d'échelle croissant de la fonction.)

Partie 2 *(7 points)*

5. *(1 point)* Dans la réalité, produire une voiture requiert d'autres facteurs de production (du travail, du textile, etc), la fonction d'offre de l'entreprise peut alors être exprimée de la manière suivante :

$$S(p) = 3p$$

Elle est sur un marché où la demande de voiture est de :

$$D(p) = 12 - 3p$$

Quel va être le prix à l'équilibre ? La quantité échangée ? Le prix à l'équilibre $p^\star$ va être tel que $D(p^\star) = O(p^\star)$, soit $p^\star = 2$. On obtient alors une quantité à l'équilibre de $q^\star = 6$.

6. *(3 points)* À l'équilibre, quel sera le surplus des consommateurs ? du producteur ? Le surplus global ? Représentez graphiquement les surplus. À l'équilibre, le surplus du consommateur est de : *(1 point)*

$$S_c = 1/2 * (4 - 2) * 6 = 6$$

Le surplus du producteur est de : *(1 point)*

$$S_p = 1/2 * 2 * 6 = 6$$

Le surplus global est de 12.
(1 point)

7. *(3 points* L'état impose une taxe $0 < t < 1$ sur chaque unité produite, qu'il récupère entièrement. Comment évolue l'équilibre (quantités et prix) ? Représentez graphiquement la situation.
Le producteur vend toujours au même prix, mais le consommateur perçoit un prix de $p + t$. Sa demande sera donc maintenant $D(p) = 12 - 3(p + t)$. À l'équilibre :

$$12 - 3(p + t) = 3p \Leftrightarrow p = 2 - t/2$$

La quantité échangée sera limitée par la quantité produite par le producteur, qui est de $6 - 3/2t$.

$$S_c = 1/2 * (6 - 2 + t/2) * (4 - 3/2t) = 6 - 3/8t^2$$

$$S_p = 1/2 * (6 - 3/2t)(2 - t/2) = 6 - 3t + 3/8t^2$$

$$S = S_c + S_p = 12 - 3t$$

Le surplus global diminue avec la taxe.
(1 point)

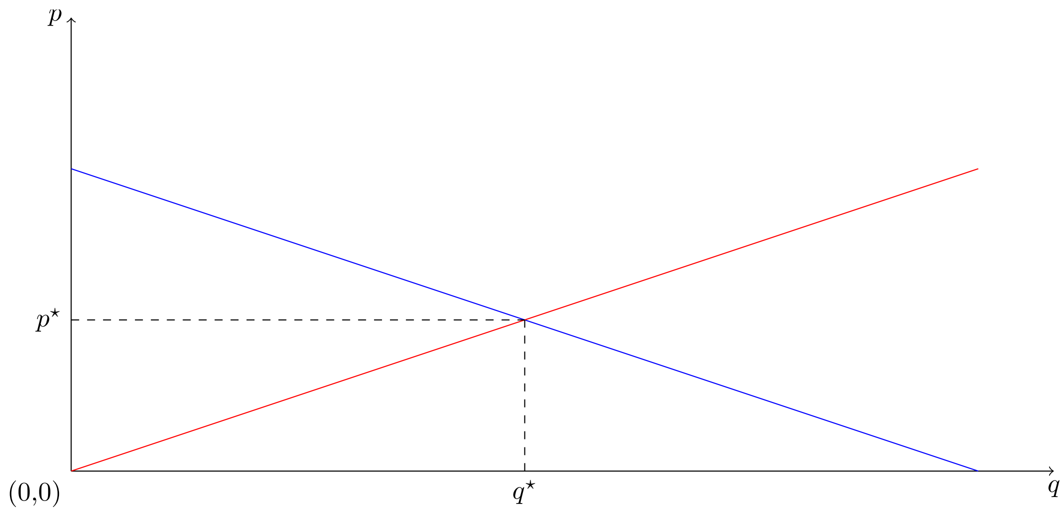

Figure 2: En bleu la demande globale, en rouge l'offre globale. *1 point*

Exercice 1 : Voitures – Variante –

Une entreprise produit des voitures en quantité q, vendues à un prix p et produite à partir de deux facteurs de production : des machines en quantité notée x_1 et du métal en quantité notée x_2. Elle achète ces facteurs à des prix notés w_1 et w_2. La fonction de production de l'entreprise est la suivante :

$$q = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}}$$

Partie 1 *(14 points)*

1. *(6 points)* Dans un premier temps, nous nous plaçons à court terme : les machines sont utilisées en quantité fixe $\bar{x}_1$. Définissez le coût irrécouvrable. Que vaut-il ici ? Quel sera le coût total à court terme ? Le coût marginal ? Le coût moyen ? Le coût variable moyen ? Représentez graphiquement le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen pour $w_1 = w_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = 1$. Définissez et donnez le seuil de rentabilité et le seuil de fermeture pour des valeurs quelconques de w_1, w_2 et $\bar{x}_1$. Comment varient-ils suivant l'investissement initial ? Les prix ?
   Le coût irrécouvrable est le coût de l'investissement dans le facteur fixe à court terme. Il est dit irrécouvrable parce que l'entreprise l'a déjà payé et ne peut pas l'ajuster *a posteriori*. Il est ici de $w_1 \bar{x}_1$. *(1 point)* À court terme, $x_1 = \bar{x}_1$, on a donc

   $$x_2 = \frac{q^3}{\bar{x}_1}$$

   On en déduit le coût total :

   $$CT(q) = w_1 \bar{x}_1 + \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^3 = CF + CV(q)$$

   Le coût marginal :

   $$Cm(q) = CT'(q) = 3 \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^2$$

   Le coût moyen :

   $$CM(q) = \frac{CT(q)}{q} = w_1 \bar{x}_1 \frac{1}{q} + \frac{w_2}{\bar{x}_1} q^2$$

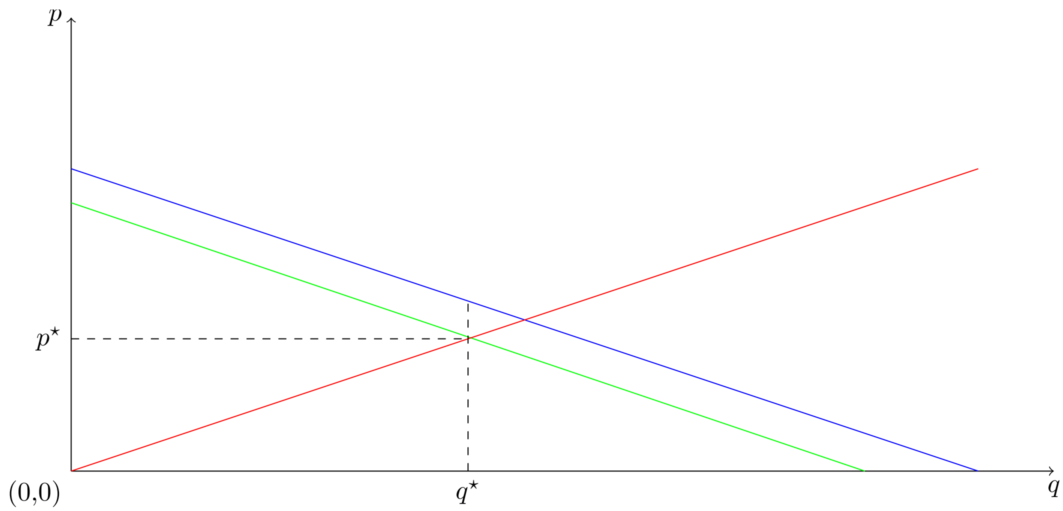

Figure 3: En bleu la demande globale, en rouge l'offre globale, en vert la demande globale après l'imposition de la taxe. *1 point*

Le coût variable moyen :

$$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q} = \frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2$$

(2 points) Pour $w_1 = w_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = 1$, on a $Cm(q) = 3q^2$, $CM(q) = 1/q + q^2$ et $CVM(q) = q^2$.

(1 point) Le seuil de rentabilité est le prix à partir duquel il est possible pour le producteur de produire en faisant des bénéfices. Il est atteint au minimum du coût moyen. On calcule donc la CPO :

$$CM'(q) = 0 \Leftrightarrow -w_1\bar{x}_1\frac{1}{q^2} + 2\frac{w_2}{\bar{x}_1}q = 0$$

Soit $q = 2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{3}}\bar{x}_1^{\frac{2}{3}}$. On obtient alors un seuil de rentabilité de :

$$p = \left(w_1^2 w_2 \bar{x}_1\right)^{\frac{1}{3}}\left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

Ce seuil est croissant avec les prix des facteurs, et est plus sensible au prix des machines qu'au prix du métal. *(2 points)* Le seuil de fermeture est le prix à partir duquel il est plus intéressant pour le producteur de produire, même à perte, plutôt que de ne pas produire. Il est atteint au minimum du coût variable moyen. Ce minimum est clairement atteint quand $q = 0$, soit à $p = 0$. *(1 point)*

2. *(3 points)* Toujours à court terme, mais de nouveau pour des valeurs générales de w_1, w_2 et $\bar{x}_1$, quel est le profit de l'entreprise ? Comment évolue-t-il en fonction de leur investissement fixe en machine ?
   La fonction d'offre de l'entreprise est donnée par $p = Cm(q)$, soit ici : *(1 point)*

   $$p = 3\frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2 \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{1}{3}\bar{x}_1\frac{p}{w_2}}$$

   On obtient donc un profit de : *(1 point)*

   $$\pi(q) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{p^3}{w_2}\bar{x}_1\right)^{\frac{1}{2}} - w_1\bar{x}_1$$

   Cette fonction est d'abord décroissante, puis croissante à partir d'un certain investissement $\bar{x}_1^\star = \frac{27}{16}\frac{w_1 w_2^2}{p^3}$ (calcul de la dérivée). *(1 point)*

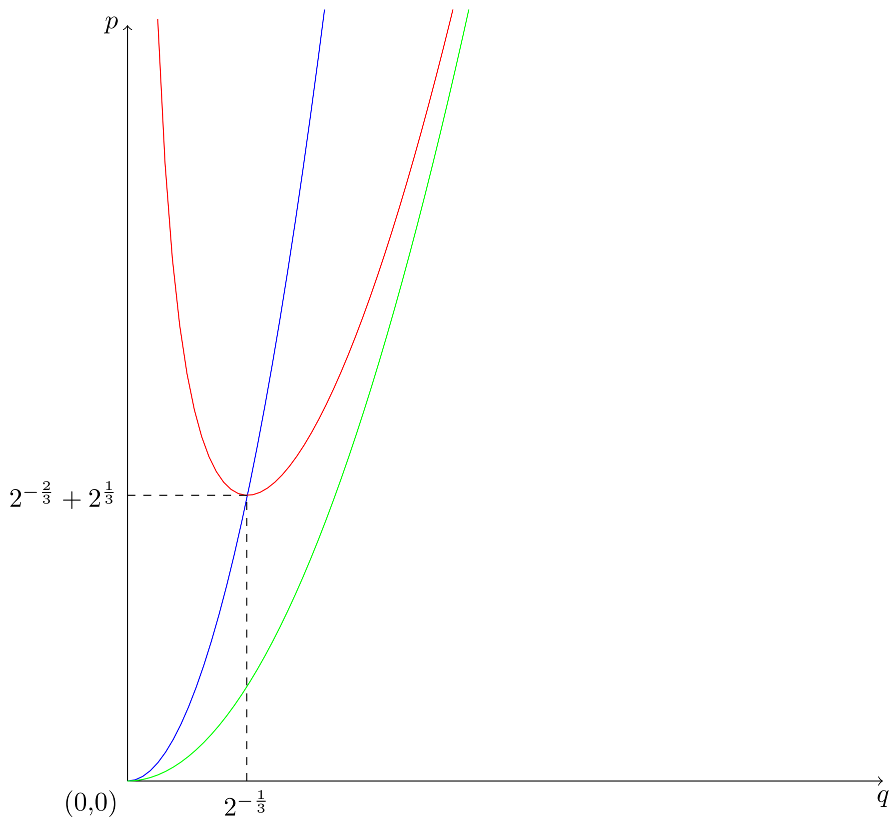

Figure 4: En bleu le coût marginal, en rouge le coût moyen et en vert le coût variable moyen. *1 point*

3. *(4 points)* Toujours dans le cas général, mais à long terme maintenant. Quel va être la fonction d'offre de l'entreprise ? Est-ce que cette fonction d'offre ressemble à une fonction d'offre classique ? On a ici une fonction de production de Cobb-Douglas, les conditions d'optimalités sont

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$q = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}}$$

On obtient alors :

$$x_1^\star = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} q^3$$

$$x_2^\star = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} q^3$$

Soit un coût total de :

$$CT(q) = 2\sqrt{w_1 w_2} q^{\frac{3}{2}}$$

On obtient la fonction d'offre en égalisant coût marginal et prix :

$$O(p) = \frac{1}{9} w_1 w_2 p^2$$

Cette fonction d'offre est classique, elle est bien croissante avec le prix.

Partie 2 *(7 points)*

5. *(1 point)* Dans la réalité, produire une voiture requiert d'autres facteurs de production (du travail, du textile, etc), la fonction d'offre de l'entreprise peut alors être exprimée de la manière suivante :

$$S(p) = 4p$$

Elle est sur un marché où la demande de voiture est de :

$$D(p) = 24 - 4p$$

Quel va être le prix à l'équilibre ? La quantité échangée ? Le prix à l'équilibre $p^\star$ va être tel que $D(p^\star) = O(p^\star)$, soit $p^\star = 3$. On obtient alors une quantité à l'équilibre de $q^\star = 12$.

6. *(3 points)* À l'équilibre, quel sera le surplus des consommateurs ? du producteur ? Le surplus global ? Représentez graphiquement les surplus. À l'équilibre, le surplus du consommateur est de : *(1 point)*

$$S_c = 1/2 * (6 - 3) * 12 = 18$$

Le surplus du producteur est de : *(1 point)*

$$S_p = 1/2 * 3 * 12 = 18$$

Le surplus global est de 36.

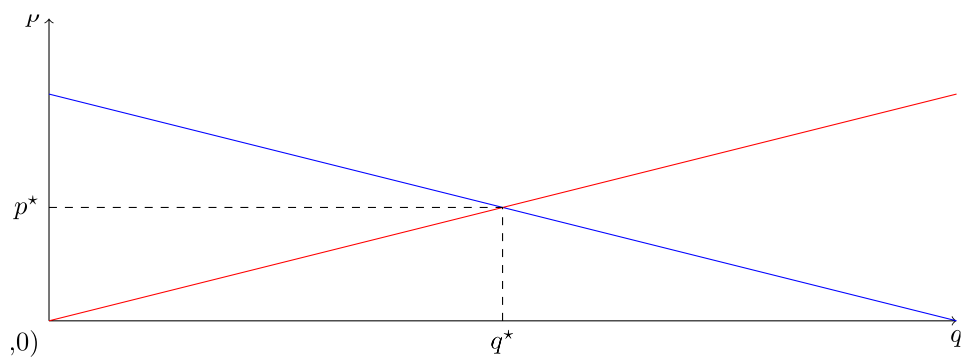

Figure 5: En bleu la demande globale, en rouge l'offre globale. *1 point*

(1 point)

7. *(3 points* L'état impose une taxe $0 < t < 1$ sur chaque unité produite, qu'il récupère entièrement. Comment évolue l'équilibre (quantités et prix) ? Représentez graphiquement la situation.
Le producteur vend toujours au même prix, mais le consommateur perçoit un prix de $p+t$. Sa demande sera donc maintenant $D(p) = 24 - 4(p+t)$. À l'équilibre :

$$24 - 4(p + t) = 4p \Leftrightarrow p = 3 - t/2$$

La quantité échangée sera limitée par la quantité produite par le producteur, qui est de $12 - t/2$.

$$S_c = 1/2 * (6 - (3 + t/2)) * (12 - 2t) = 18 - 6t + t^2/2$$

$$S_p = 1/2 * (12 - 2t)(3 - t/2) = 18 - 6t + t^2/2$$

$$S = S_c + S_p = 36 - 12t + t^2$$

Le surplus global diminue avec la taxe.
(1 point)

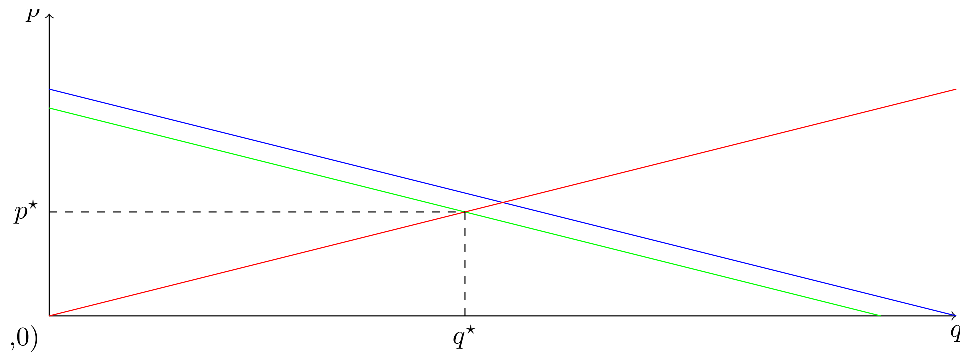

Figure 6: En bleu la demande globale, en rouge l'offre globale, en vert la demande globale après l'imposition de la taxe. *1 point*

QCM *(1 point chaque)*

Vous obtiendrez le point à la question si et seulement vous avez sélectionnez toutes les réponses justes.

4. *(1 point)* Les rendements d'échelle de fonction de production $q = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}}$ sont :
   1. Constants
   2. Croissants
   3. **Décroissants**
   4. Aucune des réponses précédentes
5. *(1 point)* Les rendements d'échelle de fonction de production $q = (x_1 x_2)^{\frac{2}{3}}$ sont :
   1. Constants
   2. **Croissants**
   3. Décroissants
   4. Aucune des réponses précédentes
6. Le seuil de rentabilité est obtenu en :
   1. **Minimisant le coût moyen**
   2. Minimisant le coût
   3. Minimisant le coût marginal
   4. Minimisant le coût variable moyen
7. Le seuil de fermeture est obtenu en :
   1. Minimisant le coût moyen
   2. Minimisant le coût
   3. Minimisant le coût marginal
   4. **Minimisant le coût variable moyen**
8. Deux facteurs de productions sont substituables si :
   1. Leur élasticité prix croisée est strictement positive
   2. **Leur élasticité de substitution est strictement positive**
   3. Leur élasticité prix est strictement négative
   4. Leur élasticité de substitution est négative
9. Pour déterminer la substituabilité / complémentarité de deux facteurs de productions, on doit :
   1. **Calculer leur élasticité de substitution**
   2. Calculer leur élasticité prix croisée
   3. Calculer leur élasticité revenu
   4. **Calculer leur élasticité de substitution technique**
10. L'isoquante d'un producteur avec des facteurs complémentaires est représentée par (dessins) :
    1. Une droite
    2. **Deux droites en coins**
    3. Une courbe quelconque

   4. Une courbe quelconque (2)
11. L'isoquante d'un producteur avec des facteurs substituables est représentée par (dessins) :
    1. **Une droite**
    2. Deux droites en coins
    3. Une courbe quelconque
    4. Une courbe quelconque (2)
12. Quelles hypothèses sont vérifiées dans un marché de concurrence pure et parfaite ?
    1. **Atomicité (des acteurs)**
    2. **homogénéité (du produit)**
    3. **libre entrée et sortie (du marché)**
    4. Nullité des profits des entreprises
    5. Hétérogénéité (des produits)