Méthodologies

Elias Bouacida

October 8, 2017

Programme du consommateur

Dans mes notations, p et x sont des vecteurs, et . représente un produit scalaire : $p = (p_1, p_2)$, $x = (x_1, x_2)$ et $p.x = p_1 x_1 + p_2, x_2$. R est le revenu du consommateur, U son utilité.

Utilité indirecte (Chapitre 1, exercice 2, question 6)

L'utilité indirecte, notée v, est l'utilité à l'optimum, exprimée en fonction des prix et du revenu.

$$v(p, R) = U(x^\star(p, R))$$

On peut alors regarder comment évolue l'utilité quand les prix et / ou le revenu change. En général, l'utilité indirecte est croissante avec le revenue et décroissante avec les prix.

Minimisation des dépenses (Chapitre 1, exercice 2, question 7)

Le problème du consommateur peut s'écrire de deux manières équivalentes :

1. Par la maximisation d'utilité sous la contrainte du budget :

$$\max_x U(x) \text{ s.c. } p.x \leq R$$

2. Par la minimisation du budget sous la contrainte d'utilité :

$$\min_x p.x \text{ s.c. } U(x) \geq \bar{U}$$

La première version du problème, vous la connaissez bien. La deuxième, moins. Elle aboutit néanmoins au même résultat, à savoir que (sous réserve que le problème vérifie des conditions de convexité) :

$$TMS_{2\to 1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

et (sous réserver que l'utilité soit bien croissante dans les biens) :

$$U(x) = \bar{U}$$

Vous pouvez alors résoudre ce système de deux équations à deux inconnues pour obtenir les consommations optimales $x^\star(p, \bar{U})$ en fonction des prix et de l'utilité que l'on souhaite atteindre.

Cette manière de poser le problème permet de déterminer la dépense minimale pour obtenir une utilité donnée. Elle permet ainsi de répondre à des questions du type : de combien faut-il augmenter la dépense (le revenu) pour conserver la même utilité si le prix d'un bien augmente ? C'est ce que l'on appelle la **compensation hicksienne**.

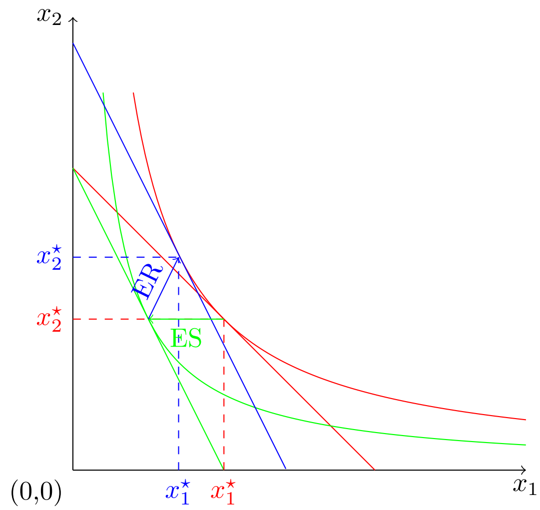

Figure 1: Représentation graphique de la question 7 de l'exercice 2. En rouge, la situation initiale. En vert, la situation après une augmentation du prix du bien 1, qui nous permet d'obtenir l'effet de substitution (ES). En bleu, l'augmentation nécessaire du revenu pour conserver l'utilité initiale. On obtient ainsi l'effet revenu (ER).

Le raisonnement graphique dans le risque (Chapitre 1, Exo 5)

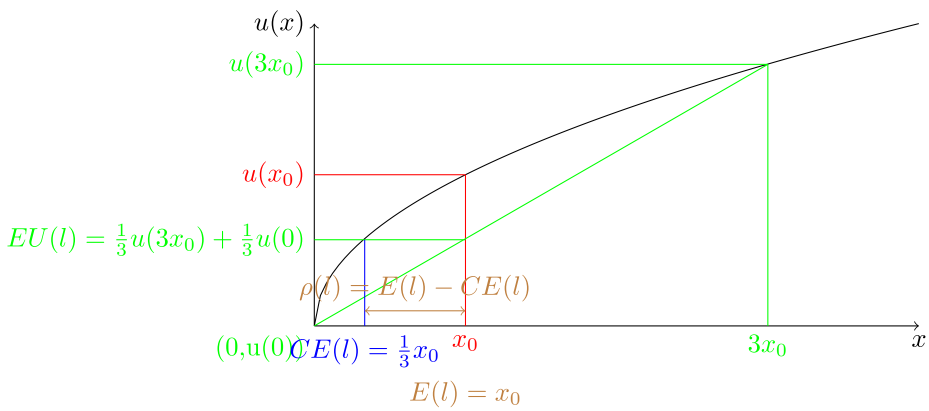

Figure 2: Représentation graphique de l'exercice 5 du chapitre 1. En rouge, l'utilité retirée de la richesse initiale. En vert, le calcul de l'espérance d'utilité. On commence par représenter les deux situations possible (obtenir 0 ou $3x_0$), et on en trouve l'espérance. En bleu, de l'équivalent certain : on regarde l'espérance d'utilité et on cherche son antécédent par la fonction d'utilité $u(x)$. En marron le calcul de la prime de risque : on calcule l'espérance de gain de la loterie, puis sa différence avec l'équivalent certain.

Programme du producteur

Fonctions de demande des facteurs

La fonction de demande d'un facteur donne la quantité d'un facteur de production, soit en fonction de :

- quantités de produits. Elle est alors conditionnelle à la quantité produite.
- des prix des facteurs et du produit. Elle est alors inconditionnelle.

La première s'obtient en minimisant le coût sous la contrainte de la fonction de production. Dans le cas d'une fonction de production de Cobb-Douglas à deux facteurs, en résolvant le problème suivant :

$$CT(q) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ s.c. } q = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

La seconde s'obtient en ajoutant la maximisation du profit à la résolution du problème précédent :

$$\max_q \pi(q) = \max_q pq - CT(q)$$

Dont la solution général est l'égalité du prix du produit avec son coût marginal de production : $p = Cm(q)$. On inverse alors la fonction de coût marginale et on obtient $q = Cm^{-1}(p)$. Une fois obtenue la quantité de produit optimale aux prix donnée, on peut l'utiliser dans les fonctions de demande conditionnelles des facteurs de production.

Fonction d'offre (du produit)

La fonction d'offre du produit donne la quantité du produit en fonction des prix des facteurs de productions. Elle s'obtient en arrêtant le raisonnement précédent à $q = Cm^{-1}(p)$.

Seuil de rentabilité et seuil de fermeture

Ces seuils se calculent à court terme.

Le seuil de rentabilité est le *prix* de vente à partir duquel le producteur peut faire des bénéfices sur les unités vendues. Il est atteint au minimum du coût moyen :

$$\text{seuil de rentabilité} = \min_q CM(q)$$

Le seuil de fermeture est le *prix* de vente à partir duquel le producteur préfère produire plutôt que de ne pas produire. C'est-à-dire quand il commence à rembourser son coût fixe. Il est atteint au minimum du coût variable moyen.

$$\text{seuil de fermeture} = \min_q CVM(q)$$

Chapitre 3, Exercice 1, Question 3 : Court terme et long terme

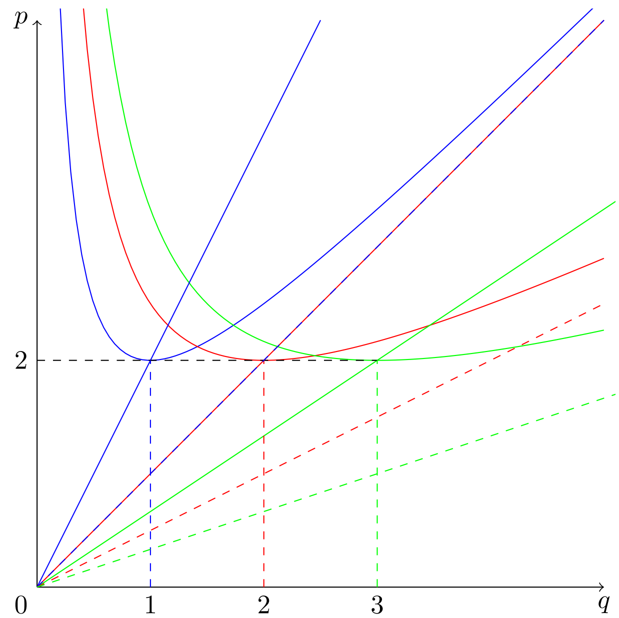

Figure 3: L'ensemble des droites de coûts, réponse aux questions 2 et 3 de l'exercice 1 du chapitre 3. En bleu pour $\bar{x_1} = 1$, en rouge pour $\bar{x_1} = 2$, en vert pour $\bar{x_1} = 3$. Les droites continues sont les droites de coûts marginaux, alors que les courbes représentent les coûts moyens. Les droites en pointillées sont les coûts variables moyens. Les droites de coûts variables moyens sont les asymptotes aux coûts moyens lorsque les quantités produites tendent vers l'infini.

Équilibres

Le surplus du consommateur est la somme des différences entre le prix qu'il est prêt à payer pour chaque unité échangée et le prix auquel il la paie effectivement. C'est l'aire comprise entre la courbe de demande et le prix. L'expression générale du surplus du consommateur est :

$$S_c = \int_0^{q_0} p_D(q)dq - p_0 q_0$$

Où p_D est la fonction de demande inverse et p_0 et q_0 sont tels que $q_0 = D(p_0)$ (où $p_0 = p_D(q_0)$).

Le surplus du producteur est sont profit. C'est la différence entre son chiffre d'affaire et son coût total. C'est l'aire comprise entre le prix payé et la courbe d'offre. Formellement :

$$S_p = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} p_S(q)dq$$

Où p_S est la fonction d'offre inverse, autrement dit, $p_S = C_m = S^{-1}$ et p_0 et q_0 sont définis comme précédemment.

Le surplus collectif est la somme du surplus du producteur et du consommateur, et parfois du surplus de l'État.

Chapitre 4, Exercice 1 : surplus

On a la fonction de demande (de produit) du consommateur $D(p) = 6 - p$ et la fonction d'offre (de produit) du producteur $S(p) = 2p$. Les fonctions inverses sont donc $p_D(q) = 6 - q$ et $p_S(q) = q/2$. On les représente graphiquement :

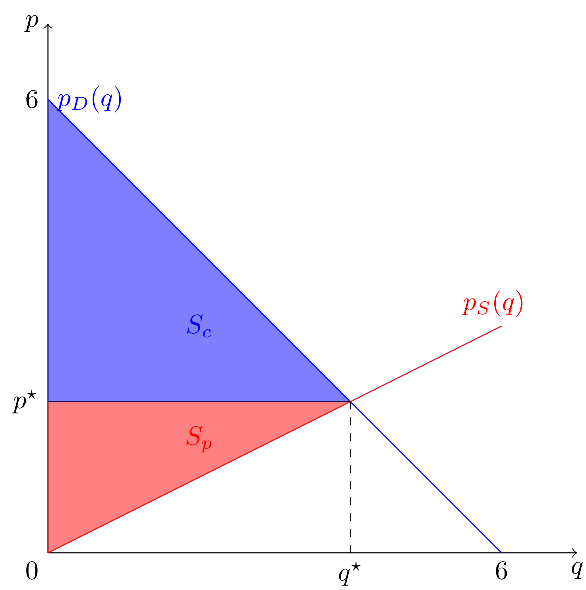

Figure 4: Représentation graphique d'un équilibre partiel. L'aire en bleue est le surplus du consommateur, l'aire en rouge celle du producteur.

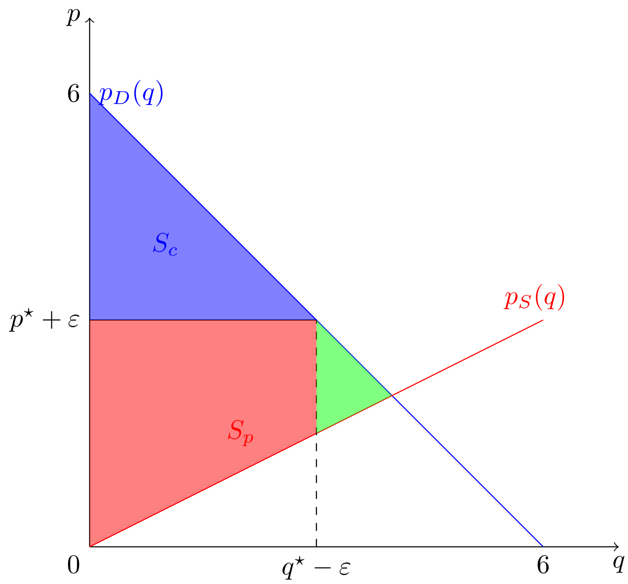

Figure 5: Représentation graphique des surplus, avec un prix de $p^\star + \varepsilon$. L'aire en bleue est le surplus du consommateur, l'aire en rouge celle du producteur. L'aire en vert est la perte de surplus collectif liée à l'éloignement de l'équilibre. Notez qu'un des acteurs peut gagner en surplus quand on s'éloigne de l'équilibre, mais la perte de l'autre sera toujours supérieur à ce gain, ce qui entraîne une diminution du surplus collectif.

Chapitre 4, Exercice 2

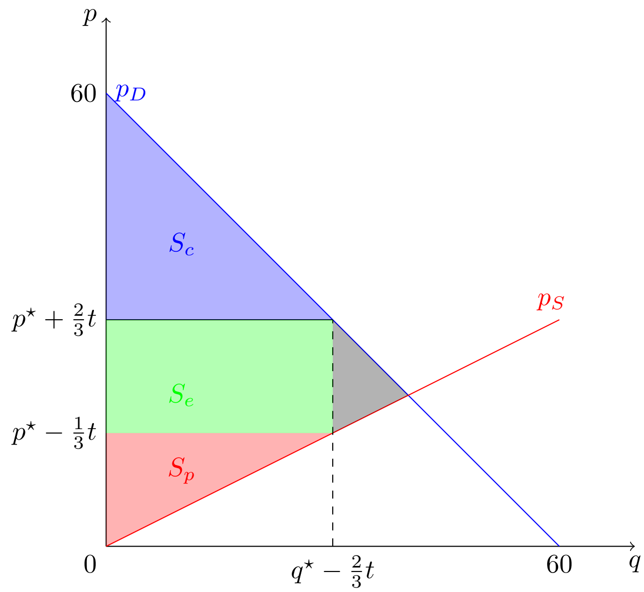

Figure 6: Représentation graphique des surplus, avec des taxes de l'État. L'aire bleue est le surplus du consommateur, l'aire rouge celle du producteur. L'aire verte est le surplus de l'État. L'aire noire est la perte de surplus collectif causée par la taxe. Ici $q^\star = 40$ et $p^\star = 20$.

Chapitre 5, Exercice 3

Question 6

On peut répondre à cette question en utilisant une partie des réponses précédentes. Pour mémoire, l'équilibre général se calcule de la manière suivante :

1. Résolution du programme de maximisation de l'utilité du consommateur, ici :

$$\max_{Y,l} U(Y,l) = Yl \text{ s.c. } pY + wl = 10w + \pi$$

   la contrainte est saturée car l'utilité est croissante dans les deux biens. Rappelez-vous la contrainte de temps du consommateur $l + L = 10$. On obtient avec ce programme la demande de bien du consommateur Y^d et son offre de travail L^s (obtenu à la question 1).
2. Résolution du programme de maximisation du profit du producteur, ici :

$$\max_{Y} \pi(Y) = pY - wL \text{ s.c. } Y = \alpha L$$

   On est alors censé obtenir ici l'offre de bien du producteur Y^s et sa demande de travail L^d. Nous verrons en résolvant ce programme que ce ne sera pas le cas, à cause de la forme linéaire de la fonction de production, qui entraîne des rendements d'échelles constants.
3. Utilisation de la caractérisation de l'équilibre général, à savoir que les demandes nettes sont nulles à l'équilibre. Dit autrement, les sommes des quantités consommées et produites doivent être identiques. Ici :

$$\begin{array}{rcl} z_Y & = & Y^d - Y^s = 0 \\ z_L & = & L^d - L^s = 0 \end{array}$$

La première partie de la résolution a déjà été faite à la question 1 :

$$\begin{array}{rcl} Y^d & = & \frac{10w+\pi}{2p} \\ L^s & = & 5 - \frac{\pi}{2w} \end{array}$$

Pour le producteur, le profit se réécrit, en utilisant la contrainte :

$$\pi(L) = \alpha p L - wL = (\alpha p - w)L$$

Ce profit est linéaire dans la quantité de facteur de production et dans la quantité de produit. Cela implique que l'offre sera nulle si $\alpha p < w$ et infinie sinon. La première situation impliquerait un excès de demande de bien de consommation Y et la seconde un excès d'offre de bien de consommation.

Le seul équilibre possible est l'équilibre tel que le rapport des prix $\frac{w}{p} = \alpha$. Les quantités de produit et de facteur de production ne seront pas fixées par le producteur et le consommateur ensemble, mais uniquement par le consommateur. La contrainte à utiliser ici est que le profit du producteur à l'équilibre sera nul $\pi^\star = 0$, car $\frac{w}{p} = \alpha$.

On en déduit alors à l'équilibre :

$$\begin{array}{rcl} Y^\star & = & Y^d = \frac{10w}{2p} = 5\alpha \\ L^\star & = & L^s = 5 \end{array}$$