Fiche Mathématiques L1

Elias Bouacida

12 décembre 2016

1 Cours 1

Concepts :

- Un ensemble est composé d'élément : $A = \{a, b, c, d\}$. A est un ensemble.
- Un élément appartient (noté $\in$) à un ensemble. Dans l'ensemble précédent, b est un élément de l'ensemble A.
- Un sous-ensemble B de l'ensemble A est un ensemble composé d'éléments de A. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ est un sous-ensemble de A. Un sous-ensemble est inclus (noté $\subseteq$) dans l'ensemble contenant. $B \subseteq A$: B *est inclus dans* A.
- Une partition d'un ensemble A est une famille de sous-ensembles de A telle que la réunion de ces sous-ensembles est A et que ces sous-ensembles sont disjoints deux à deux. On le note mathématiquement :

$$(A_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une partition de A} \Leftrightarrow \begin{cases} \cup_{i=1}^{n} A_i = A \\ \forall i, j; i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

  Par exemple la famille $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ est une partition de l'ensemble A de la ligne précédente.
- Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient. L'ensemble A précédent contient 3 éléments.
- Le quantificateur pour tout : $\forall$, signifie que quelque soit l'élément pris, la suite de l'énoncé est vraie. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, qui se lit : *Tout entier naturel est un nombre réel.*
- Le quantificateur il existe : $\exists$ signifie qu'il existe (sous-entendu au moins) un élément qui va vérifier la suite de l'énoncé. Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{N}$: il existe un nombre réel qui est (aussi) un entier naturel.
- Le quantificateur il existe un unique $\exists!$, signifie qu'il existe un unique élément de l'ensemble qui vérifie la propriété énoncée.
- Le quantificateur il n'existe pas $\nexists$ signifie que l'énoncé suivant n'est jamais vérifié. Par exemple, $\nexists x \in \mathbb{N}, x < 0$, il n'existe pas d'entier naturel strictement négatif.

1.1 Relations

Relations ensemblistes Ce sont les relations sur les ensembles, que l'on peut rapprocher de leurs équivalents sur les nombres :

— L'union de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble contenant les éléments de A et de B (+ sur les ensembles) :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

— L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble contenant les éléments à la fois dans A et dans B :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

— La différence de deux ensembles A et B, notée $A \backslash B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$

— La différence symétrique de deux ensembles A et B, notée $A \Delta B$, est l'ensemble des éléments uniquement dans A ou dans B :

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin A \cap B \end{aligned}$$

Relations scalaires (= sur les nombres) :
— $\leq, \geq$
— $<, >$
— $=$

1.2 Propriétés des relations binaires

Une relation binaire R sur un ensemble E est une relation entre deux éléments a et b de cet ensemble. Une relation peut être représentée par un produit cartésien : $E \times E$. Une relation peut avoir plusieurs propriétés :

— *Réflexive* : chaque élément est en relation avec lui-même :

$$\forall a \in E, aRa$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la relation $\leq$, $\leq$ est réflexive parce que tout élément de $\mathbb{R}$ est inférieur ou égal à lui-même. Ce n'est pas vrai pour la relation $<$.

— *Symétrique* : si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre dans un sens, ils le sont dans l'autre.

$$\forall a, b \in E, aRb \Leftrightarrow bRa$$

Un exemple d'une telle relation est la relation $=$.
Le contraire d'une relation symétrique est une relation asymétrique.

— *Antisymétrique* : si deux éléments sont en relation dans les deux sens, ils sont égaux :

$$\forall a, b \in E, aRb \text{ et } bRa \Leftrightarrow b = a$$

$\leq$ est une relation antisymétrique, $<$ ne l'est pas.

— *Transitive* : une relation est symétrique si :

$$\forall a, b, c \in E \text{ tel que } aRb \text{ et } bRc \Rightarrow aRc$$

$\leq$ est transitive, « est perpendiculaire à » ne l'est pas.

1.3 Application/fonction

Une application est une « transformation » d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F [1] telle que chaque élément de l'ensemble de départ (appelé antécédent) a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivé (un élément de l'ensemble d'arrivé est appelé une image). On dit qu'une application est :

- Injective quand chaque élément de l'ensemble d'arrivé possède au plus un antécédent.
- Surjective quand chaque élément de l'ensemble d'arrivé possède au moins un antécédent.
- Bijective quand elle est à la fois surjective et injective, c'est-à-dire qu'à chaque antécédent est associé une image et une seule.

1.4 Preuve / Démonstration

Une preuve (ou démonstration) suit une démarche :

> On part de ce que l'on sait pour aboutir à ce que l'on veut prouver (démontrer). La preuve est la démarche logique qui part de ce qui est su pour aboutir au nouveau résultat (en ce sens, c'est une argumentation).

Pour réaliser une preuve, une démarche conseillée est de :

1. Écrire ce que l'on sait (les données et les hypothèses de l'énoncé) ;
2. Écrire ce que l'on veut montrer (le résultat demandé) ;
3. Écrire les propriétés que l'on pourrait utiliser (qui viennent de nos connaissances et du cours).

Ces propriétés doivent permettre de passer des hypothèses au résultat.

Exemple : Exercice 9 TD 1.

- Ce que l'on sait : A, B et C sont trois ensembles non vides et non disjoints 2 à 2.
- On cherche une formule pour donner $\#A \cup B \cup C$ en fonction des cardinaux des ensembles A, B et C et de leurs intersections.
- Ce que l'on peut utiliser : la formule du cours $\#A \cup B = \#A + \#B - \#A \cap B$.

Méthode de preuve Il existe différente méthodes logique pour effectuer une preuve :

- La preuve directe, celle expliquée précédemment, on suppose ce que l'on sait et on montre ce que l'on veut montrer.
- La preuve par contraposition. Quand on veut montrer qu'une implication est vraie ($P \Rightarrow Q$), il est possible de passer par sa contraposée ($non(Q) \Rightarrow non(P)$). Ce sont deux propositions logiquement équivalentes.
  Cela revient à supposer que si le résultat n'est pas obtenu ($non(Q)$), l'hypothèse n'est pas vérifiée ($non(P)$).
- La démonstration d'une équivalence ($\Leftrightarrow$) revient souvent à démontrer son implication et sa réciproque (« dans un sens puis dans l'autre »)
- La démonstration par récurrence. Vous ne connaissez pour l'instant qu'un seul type de démonstration par récurrence, la récurrence faible, il en existe d'autres.

1. formellement décrite par un produit cartésien $E \times F$

Le but est de démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie quelque soit le n considéré à partir d'un certain rang k (généralement $k = 0$ ou $k = 1$). Elle s'effectue en deux étapes :

1. L'initialisation : montrer que la proposition à démontrer est vraie au premier rang (rang k)
2. L'hérédité : supposer qu'elle est vraie au rang n et montrer qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$.

Ces deux étapes permettent de montrer que la proposition $P(n)$ est vraie quel que soit le n plus grand que le n utilisé lors de l'initialisation.

— La démonstration par l'absurde : Elle consiste à supposer le contraire de ce qu'on veut montrer. On doit alors aboutir à une contradiction.

2 Entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.
Les entiers naturels peuvent vérifier plusieurs propriétés.

— Ils peuvent être pair ou impairs :
  — x est pair ssi $\exists k \in \mathbb{N} | x = 2k$
  — x est impair ssi $\exists k \in \mathbb{N} | x = 2k + 1$

— On dit qu'un nombre entier p divise un autre nombre entier q, que l'on note $p|q$ si on peut écrire q sous la forme $q = k \cdot p$, $k \in \mathbb{N}$. Par exemple $3|57 : 57 = 19 \cdot 3$.

— x peut être premier, cela signifie qu'il ne possède que deux diviseurs, 1 et lui-même. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont des nombres premiers par exemple.

— Deux entiers x et y sont premiers entre eux s'il n'existe pas de nombre qui les divise tout les deux autres que 1. Par exemple 4 et 9 sont premiers entre eux, mais pas 8 et 6, qui peuvent tout les deux être divisé par 2.

— On peut décomposer tout nombre entier en facteurs premiers. C'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme le produit de nombres premiers. La division en facteur premiers de 12 s'écrit par exemple $12 = 2^2 \cdot 3^2$. Cette décomposition est unique.

3 Droites linéaires et droites affines

Les droites linéaires et affines sont des familles de droites qui s'écrivent sous la forme d'un polynôme du premier degré, c'est-à-dire sous la forme :

$$y = ax + b$$

dans un diagramme cartésien. Pour les droites linéaires, le coefficient b est égal à 0. Pour une droite affine b est l'*ordonnée à l'origine*. Le coefficient a est appelé la *pente* de la droite. Il y a plusieurs façons de représenter une telle droite dans un repère cartésien :

1. On peut commencer par prendre l'ordonnée à l'origine, qui est un point sur l'axe des ordonnées. On utilise ensuite la pente pour tracer la droite.
2. On peut calculer deux points aux travers desquelles passe la droite, par exemple le point d'abscisse $x = 0$ (et d'ordonnée b) et le point d'abscisse $x = 1$ (et d'ordonnée $y = a + b$.

Il est souvent demandé de retrouver l'équation d'une droite à partir de deux points A et B. Soit (x_A, y_A) et (x_B, y_B) leurs coordonnées respectives. La pente a s'obtient à partir de l'équation suivante :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

On peut ensuite obtenir l'ordonnée à l'origine en utilisant un des points précédent, par exemple A. On sait que $y_A = ax_A + b$, soit $b = y_A - ax_A$. La formule générale pour b est la suivante (mais je vous déconseille de l'utiliser) :

$$b = \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}$$

4 Équation du second degré

On prend un polynôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$[2]. Notons f la fonction associée. Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Étudions cette fonction, pour en déterminer les caractéristiques.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, on appelle Δ le *discriminant* de l'équation du second degré. On peut alors réécrire f :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Étudions maintenant cette fonction :

- Son ordonnée à l'origine est c ;
- Son extremum est atteint en $\frac{-b}{2a}$ et sa valeur est de $-\frac{\Delta}{4a}$[3] ;
- f a pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$, car $f\left(-x - \frac{b}{2a}\right) = f\left(x - \frac{b}{2a}\right)$.
- f est une parabole vers le haut si a est positif et vers le bas s'il est négatif.

Reste à trouver les racines de f (si elle en possède). Trois cas sont possibles :

2. Autrement c'est une fonction affine, cf section 3

3. car on annule ainsi la partie dans le carré, qui est positive et est la seule à dépendre de x. Il ne faut pas oublier le a en facteur pour donner la valeur.

1. $\Delta > 0$, on peut alors écrire $\sqrt{\Delta}$. f se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

   On en déduit que f possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = -\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

   f change de signe à ses racines. Elle est du signe opposé au signe de a à l'intérieur de ses racines et du signe de a à l'extérieur.
   On peut remarquer plusieurs choses à propos de ces racines :
   (a) Une fois qu'on les a trouvées, il est possible de réécrire f sous la forme :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

   (b) La formulation de droite signifie deux choses :
      i. La somme des racines (x_1+x_2) est égale à $-\frac{b}{a}$.
      ii. Le produit des racines (x_1x_2) est égal à $\frac{c}{a}$.
   (c) La première remarque précédente signifie aussi que le maximum, qui est atteint en $-\frac{b}{2a}$ est atteint au milieu des deux racines $(\frac{x_1+x_2}{2})$.
   (d) Les deux remarques montrent aussi que si une des deux racines est connue (racine évidente), il est alors possible de retrouver l'autre facilement (de préférence avec le produit). Il faut juste être attentif au signe.
2. $\Delta = 0$, f se réécrit alors sous la forme :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

   f possède alors une racine double, $x_1 = -\frac{b}{2a}$ et la valeur de l'extremum est 0. f ne change pas de signe et est du signe de a partout.
3. $\Delta < 0$, f ne possède alors pas de racine, elle est alors soit strictement positive $(a > 0)$ ou strictement négative $(a < 0)$.

5 Suites

Les suites sont une part importante du programme. On en distingue deux types, suivant la manière dont elles sont définies :

— Les suites définies de manière directe / explicite : $u_n = f(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ et f est une fonction (en général, d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient ici u_n directement à partir de la valeur de n correspondante.
— Les suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 = a$, où $a \in \mathbb{R}$ est un nombre et f est une fonction (en général, d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient ici les termes de la suites en les calculant à partir du terme précédent. C'est-à-dire qu'on obtient u_{n+1} à partir de u_n.

Les techniques utilisées pour étudier ces deux types de suites sont parfois similaires, parfois différentes. Globalement, l'étude d'une suite consiste à :
— Trouver des majorants / minorants ;
— Étudier la monotonie de la suite ;
— Étudier sa convergence ;
— (si elle converge) Donner sa limite.

Dans de nombreux, l'étude d'une suite définie par récurrence se fera à l'aide d'une démonstration par récurrence (mais pas toujours).

Un conseil général avant de commencer l'étude d'une suite : si vous n'avez pas vraiment d'idée, commencez par calculer les premiers termes. Ils donnent souvent une indication sur le comportement de la suite (et ils pourront être utile pour d'éventuelles démonstrations par récurrence).

5.1 Majorants / minorants

La première question à laquelle répondre : la suite est-elle (strictement) positive ou négative ? Cette question est souvent assez facile et importante pour l'étude de la monotonie.

Il n'y a pas de règle par la suite. Il est parfois judicieux d'étudier la monotonie avant de chercher des majorants et minorants.

5.2 Monotonie

L'étude de la monotonie d'une suite se fait en général de deux manières :

1. L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il est toujours (strictement) positif, la suite est (strictement) croissante. S'il est toujours (strictement) négatif, la suite est (strictement) décroissante.
2. La comparaison du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1. Cette méthode n'est possible uniquement si on a prouvé auparavant que (u_n) est de signe constant. Dans le cas contraire, il faut utiliser la méthode précédente. Deux sous-cas :
   — (u_n) est strictement positive, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est strictement croissante. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est strictement décroissante. Si les signes sont larges, la suite n'est plus strictement croissante ou décroissante.
   — (u_n) est strictement négative, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est strictement décroissante. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est strictement croissante. Si les signes sont larges, la suite n'est plus strictement croissante ou décroissante.

Attention, une suite n'est pas forcément monotone. Il est tout à fait possible de trouver une suite construite ainsi ($u_n = (-1)^n$ en est un exemple).

5.3 Convergence

Pour déterminer si une suite est convergente, on utilise en général les théorèmes fondamentaux sur les suites ou le théorème des gendarmes (cf Dossier 5). Sachez que d'autres méthodes existent.

Toutes les suites ne convergent pas. On dit alors qu'elle *diverge*. Ce terme recouvre deux situations :

— Les suites qui tendent vers l'infini (plus ou moins) ($u_n = n$ par exemple).

— Les suites qui n'ont pas de limite ($u_n = (-1)^n$ en est un exemple).

5.4 Calcul de la limite

Une fois qu'il a été prouvé que la limite existe, on peut la calculer. Pour cela, deux grandes méthodes :

— La suite est définie directement, on peut alors parfois utiliser les limites connues pour trouver sa limite (ou des équivalents, voir plus loin)

— La suite est définie par récurrence. En notant l sa limite, on peut alors utiliser l'équation $l = f(l)$ pour la calculer. Si plusieurs valeurs sont possibles, il faut alors utiliser l'encadrement de la limite pour conclure sur la valeur exacte. Cette méthode peut aussi servir à montrer qu'une suite ne converge pas (cf exercice 10, dossier 5, fait en cours).

5.5 Suites particulières

Il existe deux grands types de suites particulières que vous devez connaître :

1. Les suites arithmétiques
2. Les suites géométriques

5.5.1 Les suites arithmétiques

Ce sont les suites pour lesquels :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

où $r \in \mathbb{R}$ est constant. On dit que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On peut alors réécrire $u_n = u_0 + nr$. Ces suites sont divergentes (sauf si $r = 0$), elles tendent vers $+\infty$ is $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.

La somme d'une suite arithmétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(u_0 + kr) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_0 + \sum_{k=0}^{n} kr \\ &= (n+1)u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr) \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)\end{aligned}$$

Vous devez connaître ce résultat.

5.5.2 Les suites géométriques

Ce sont les suites pour lesquels :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

où $q \in \mathbb{R}$ est constant. On dit que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On peut alors réécrire $u_n = u_0 \times q^n$. La convergence de ces suites est un peu plus compliquées que celle des suites arithmétiques. Plusieurs cas existent :

- $|q| < 1$, la suite converge vers 0 ;
- $q = 1$, la suite est constante ;
- La suite diverge dans tous les autres cas, mais de manière différente :
  - Si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.
  - Si $q > 1$, la suite tant vers l'infini, positivement si $u_0 > 0$, négativement sinon.

La somme d'une suite géométrique s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k \\ &= u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\end{aligned}$$

Vous devez connaître ce résultat.

6 Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton permet de développer la formule $(a+b)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Où :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

6.1 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux sont utiles pour calculer cette formule, mais aussi en dénombrements pour calculer le nombre de sous ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments. Ils disposent de plusieurs propriétés remarquables :

— $C_n^0 = C_n^n = 1$
— $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, avec $n \geq 1$
— $C_n^{n-k} = C_n^k$, avec $0 \leq k \leq n$, formule généralisée des deux formules précédentes.
— $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$, avec $n \geq 1, 0 \leq k \leq n$
— $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, avec $n \geq 1, 0 \leq k \leq n$.

Ces formules permettent de calculer ce que l'on appelle le triangle de Pascal, qui donne les coefficients binomiaux pour toutes les valeurs de n, et en particulier la troisième formule, qui permet de passer d'une ligne du tableau à la suivante.

n\ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	18	56	70	56	28	8	1

7 Fonctions

Le chapitre sur les fonctions est un chapitre long et important. Il vous servira aussi beaucoup en économie, notamment le chapitre sur l'optimisation. L'étude d'une fonction f se déroule presque toujours de cette manière :

1. Son domaine de définition D_f, ainsi que son domaine de dérivabilité.
2. Ses limites aux bornes du domaine de définition, ainsi que ses asymptotes
3. Son tableau de variation.
4. Ses extréma, leur lieu et leur nature.
5. Sa représentation graphique.

Pour cela, vous avez besoin de plusieurs outils :

1. Les limites connues ainsi que les croissances comparées ;
2. Les dérivées ;
3. L'étude des signes.

7.1 Domaine de définition

La recherche du domaine de définition d'une fonction f consiste à savoir où vous pouvez calculez la fonction, où il est possible d'obtenir sa valeur. De façon générale, vous devez retenir ces quelques règles.

— Les polynômes sont définis (et dérivables) sur $\mathbb{R}$;
— Les fractions rationnelles sont définies (et dérivables) partout où leur dénominateur est non nul. Pour chercher les valeurs interdites, il faut donc chercher les points où le dénominateur s'annule ;
— La fonction exp est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$;
— La fonction ln est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}_*^+$;
— La fonction $\sqrt{}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur R_*^+.

Il s'agit ensuite de combiner ces règles pour obtenir le domaine de définition de f.

7.2 Limites

On recherche les limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition D_f, soit généralement en $+\infty$, $-\infty$ et aux valeurs interdites. Aux valeurs interdites, on cherche souvent la limite à gauche et la limite à droite (limites unilatérales), notées en a^+ ou a^-, quand a est un réel. Il existe aussi des règles pour les limites :

— Il faut commencer par regarder si on est en présence d'une forme indéterminée (rappel : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, +\infty - \infty$). Si ce n'est pas le cas, la limite est obtenue directement à partir de la limite de chacun des éléments de la fonction en suivant les règles d'opérations sur les limites. Si c'est une forme indéterminée, il faut utiliser les règles suivantes :
— En ∞, le monôme de plus haut degré l'emporte dans un polynôme. En $+\infty$ la limite d'un monôme est $+\infty$, il faut ensuite tenir compte du signe du coefficient du monôme. En $-\infty$, si la puissance est paire, la limite est $+\infty$, si la puissance est impaire, la limite est $-\infty$. Il faut ensuite tenir compte de du signe du coefficient du monôme.
— En 0, pour un polynôme, même tactique, sauf que le coefficient de plus faible degré l'emporte.
— exp l'emporte sur toutes les autres fonctions (croissances comparées).
— Les polynômes l'emportent sur le ln.
— Pour les fractions avec des limites indéterminées, il faut factoriser par les termes qui l'emportent en haut et en bas et ensuite comparer ces termes.

On demande ensuite les asymptotes. Il faut comprendre que les asymptotes sont de trois types :

— L'asymptote est verticale quand la limite en un point a de $\mathbb{R}$ est $\pm\infty$. L'équation de cette asymptote est alors $x = a$.

— L'asymptote est horizontale quand la limite en $\pm\infty$ est une valeur finie $b \in \mathbb{R}$. L'équation de l'asymptote est alors $y = b$.
— L'asymptote est oblique d'équation $y = ax+b$ si en $\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b) = 0$. On cherche une asymptote oblique quand la limite en $\pm\infty$ est $\pm\infty$. On cherche alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$. Si celle-ci est finie, la limite obtenue est alors a. Si elle est infinie, il n'y a pas d'asymptote à la courbe représentative de f. Si la limite est finie, on cherche la limite de $f(x) - ax$. Cette limite est forcément finie et le nombre obtenu est b. On a ainsi obtenu l'équation de l'asymptote.

7.3 Tableau de variation

Le tableau de variation permet de savoir si la fonction f est croissante ou décroissante sur un intervalle donné. Pour obtenir le tableau de variation, il faut d'abord calculer sa dérivée f'. On chercher ensuite le signe de f' sur le domaine de définition/dérivabilité. En toute rigueur, il faut s'assurer que la fonction est dérivable avant de calculer sa dérivée. Les dérivées à connaître sont dans une autre fiche.

Si la dérivée est nulle, la fonction est constante. Si la dérivée est positive, la fonction est croissante, si la dérivée est négative, la fonction est décroissante. Aux points où la dérivée s'annule, la tangente est horizontale.

7.4 Extrema

Un extrémum est un minimum ou un maximum. Un extrémum est forcément atteint en un point où la dérivée s'annule. Les points candidats à être extréma sont donc les points ou la dérivée s'annule. Pour savoir si ces candidats sont un minimum ou un maximum, il y a deux méthodes :
— Par le calcul de la dérivée seconde. Si au point a candidat à être extrémum, la dérivée seconde est strictement positive, l'extrémum est un minimum. Si la dérivée seconde est strictement négative, c'est un maximum. Si la dérivée seconde est nulle, c'est un point d'inflexion et non un extrémum.
— En utilisant le tableau de variation : si la dérivée s'annule en changeant de signe, le point est un extrémum.

Les points obtenus sont des extréma locaux. Pour savoir si ce sont des extréma globaux, il faut les comparer aux extréma de même nature ainsi qu'aux limites.

7.5 Concavité / Convexité

Une fonction est (strictement) concave quand sa dérivée seconde est (strictement) négative sur son domaine de définition. Dans le cas où la fonction est strictement concave, son extrémum est un maximum global.

Une fonction est (strictement) convexe quand sa dérivée seconde est (strictement) positive sur son domaine de définition. Dans le cas où la fonction est strictement convexe, son extrémum est un minimum global.

7.6 Représentation graphique

La représentation graphique vise à donner l'allure générale de la courbe représentative d'une fonction. Il doit apparaître sur cette représentation graphique les éventuelles asymptotes, les racines de la fonction, les extréma et tangentes horizontales.

8 Optimisation d'une fonction de deux variables

Une fonction de deux variables est une fonction qui a pour ensemble de départ $\mathbb{R}^2$ et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Le domaine de définition peut être un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. La principale tâche que vous aurez à accomplir avec une fonction de deux variables est de l'optimiser. Cela vous sera aussi très utile en économie, où l'on optimise souvent suivant les prix et la quantité pour une entreprise, ou suivant deux biens pour un consommateur. Deux types d'optimisations peuvent se présenter à vous : l'optimisation avec ou sans contraintes. L'idée est similaire à celle d'une recherche d'extréma pour une fonction d'une variable.

8.1 Optimisation sans contrainte

Soit une fonction f de deux variables x et y, $f(x, y)$. Pour chercher les candidats aux extréma de cette fonction, il faut trouver les points où les dérivées partielles suivant chacune des variable s'annulent [4]. On résout ensuite le système suivant (tout comme on cherche le point où la dérivée s'annule pour une fonction d'une seule variable) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Le-s- point-s- qui vérifie-nt- le système d'équation ci-dessus est un candidat. Pour connaître son type (maximum, minimum ou rien du tout), il faut calculer la dérivée seconde. Notons (a, b) les coordonnées d'un point candidat. Si l'inégalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 \tag{1}$$

Alors un extrémum est atteint en (a, b). Si par ailleurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, c'est un minimum, si au contraire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, c'est un maximum (note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 0$ est impossible dans le cas où on a un point candidat à un extrémum, car sinon 1 ne peut pas être vérifée).

Si l'inégalité de l'équation 1 n'est pas vérifiée, le point candidat n'est pas un extrémum. En résumé, les étapes :

1. Le domaine de définition de la fonction de deux variables (en général, $\mathbb{R}^2$).
2. Calcul des deux dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
3. Résolution du système de deux équations à deux inconnues des dérivées partielles égales à 0 pour obtenir les points candidats à être extremum.

4. Rappel : pour calculer une dérivée partielle suivant une variable, on considère que l'autre est une constante.

4. Calcul des dérivées secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
5. Évaluation de l'inégalité 1 aux points candidats ainsi que de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ aux points candidats si nécessaire.
6. Conclusion.

8.2 Optimisation sous contrainte (pas au programme cette année, mais importante pour la microéconomie)

L'optimisation sous contrainte consiste à chercher un ou des extréma d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ avec des contraintes liant les deux variables, qui sera généralement de la forme $ax + by = c$ (mais pas toujours), avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vous aurez aussi parfois les inégalités $x \geq 0$ et $y \geq 0$. En résumé (max ou min) :

$$\max_{x,y} f(x, y) \text{ s.c.} \begin{cases} ax + by = c \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vous avez deux méthodes pour résoudre ce problème.

8.2.1 La méthode par substitution

La méthode par substitution consiste à remplacer y dans l'expression de f en utilisant la contrainte. On obtient alors $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{a}$. Cela revient alors à résoudre le problème :

$$\max_{x} f\left(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{a}\right)$$

Ce problème est un problème de maximisation à une seule variable, que l'on résout classiquement. On vérifiera par la suite que les contraintes de positivité de x et y sont vérifiées par les solutions obtenues et que l'on obtient bien un maximum (minimum) en regardant le signe de la dérivée seconde.

8.2.2 La méthode du Lagrangien

Il se peut maintenant que la contrainte d'égalité soit une contrainte d'inégalité : $ax + by \leq c$, ce qui est le cas d'une contrainte de budget. Dans ce cas là, il est impossible d'utiliser la méthode par substitution et il faut utiliser la méthode du Lagrangien. On introduit alors une nouvelle variable, le multiplicateur de Lagrange λ. Le problème initial devient alors :

$$\max_{x,y} \mathcal{L}(x, y) = f(x, y) + \lambda\,(c - ax - by) + \mu x + \delta y$$

Les deux dernières contraintes servant à introduire les contraintes de positivité. Les conditions pour obtenir un maximum sont alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 0 \\
\lambda(c - ax - by) &= 0 \\
\mu x &= 0 \\
\delta y &= 0 \\
\lambda, \mu, \delta &\geq 0
\end{aligned}$$

Vous obtiendrez généralement que $\mu = \delta = 0$, $x, y > 0$, $\lambda > 0$ et $c = ax + by$, ce qui explique que cette méthode soit aussi utilisée dans le cas de contraintes égalités.